Основы логики. Логические операции и таблицы истинности

Основы логики. Логические операции и таблицы истинности

На данной странице будут рассмотрены 6 логических операций: конъюнкция, дизъюнкция, инверсия, импликация, эквивалентность и исключающие или, которых вам будет достаточно для решения сложных логических выражений. Также мы рассмотрим порядок выполнения данных логических операций в сложных логических выражениях и представим таблицы истинности для каждой логической операции.

Глоссарий, определения логики

Высказывание - это повествовательное предложение, про которое можно определенно сказать истинно оно или ложно (истина (логическая 1), ложь (логический 0)).

Логические операции - мыслительные действия, результатом которых является изменение содержания или объема понятий, а также образование новых понятий.

Логическое выражение - устное утверждение или запись, в которое, наряду с постоянными величинами, обязательно входят переменные величины (объекты). В зависимости от значений этих переменных величин (объектов) логическое выражение может принимать одно из двух возможных значений: истина (логическая 1) или ложь (логический 0).

Сложное логическое выражение - логическое выражение, состоящее из одного или нескольких простых логических выражений (или сложных логических выражений), соединенных с помощью логических операций.

Логические операции и таблицы истинности

1) Логическое умножение или конъюнкция:

Конъюнкция - это сложное логическое выражение, которое считается истинным в том и только том случае, когда оба простых выражения являются истинными, во всех остальных случаях
данное сложенное выражение ложно.
Обозначение: F = A & B.

Таблица истинности для конъюнкции

A	B	F
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

2) Логическое сложение или дизъюнкция:

Дизъюнкция - это сложное логическое выражение, которое истинно, если хотя бы одно из простых логических выражений истинно и ложно тогда и только тогда, когда оба простых логических выраженbя ложны.
Обозначение: F = A v B.

Таблица истинности для дизъюнкции

A	B	F
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

3) Логическое отрицание или инверсия:

Инверсия - это сложное логическое выражение, если исходное логическое выражение истинно, то результат отрицания будет ложным, и наоборот, если исходное логическое выражение ложно, то результат отрицания будет истинным. Другими простыми слова, данная операция означает, что к исходному логическому выражению добавляется частица НЕ или слова НЕВЕРНО, ЧТО.

Обозначение: F = ¬A.

Таблица истинности для инверсии

A	¬A
1	0
0	1

4) Логическое следование или импликация:

Импликация - это сложное логическое выражение, которое истинно во всех случаях, кроме как из истины следует ложь. То есть данная логическая операция связывает два простых логических выражения, из которых первое является условием (A), а второе (B) является следствием.

«A → B» истинно, если из A может следовать B.

Обозначение: F = A → B.

Таблица истинности для импликации

A	B	F
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

5) Логическая равнозначность или эквивалентность:

Эквивалентность - это сложное логическое выражение, которое является истинным тогда и только тогда, когда оба простых логических выражения имеют одинаковую истинность.
«A ↔ B» истинно тогда и только тогда, когда A и B равны.
Обозначение: F = A ↔ B.
Таблица истинности для эквивалентности

A	**B**	**F**
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

6) **Операция XOR (исключающие или)**

«A ⊕ B» истинно тогда, когда истинно A или B, но не оба одновременно.
Эту операцию также называют "сложение по модулю два".
Обозначение: F = A ⊕ B.

A	**B**	**F**
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Порядок выполнения логических операций в сложном логическом выражении

1. Инверсия;
2. Конъюнкция;
3. Дизъюнкция;
4. Импликация;
5. Эквивалентность.

Для изменения указанного порядка выполнения логических операций используются скобки.

Таблицы истинности можно составить и для произвольной логической функции F(a, b, c…).

В общем случае таблицы истинности имеют размер 2^N строк комбинаций для N независимых логических переменных.

Поскольку таблица истинности выражения состоит из строк со всеми возможными комбинациями значений переменных, она полностью определяет значение выражения.

Законы алгебры логики

Те, кому лень учить эти законы, должны вспомнить алгебру, где знание нескольких способов преобразования позволяет решать очень сложные уравнения.

Строго говоря, это не законы, а теоремы. Но их доказательство не входит в программу изучения. Впрочем, доказательство обычно основывается на построении полной таблицы истинности.

Замечание. Знаки алгебры логики намеренно заменены на сложение и умножение.

№	Для ИЛИ, $\vee$	Для И, &	Примечание
1	$A \vee 0 = A$	$A \,\&\, 1 = A$	Ничего не меняется при действии, константы удаляются
2	$A \vee 1 = 1$	$A \,\&\, 0 = 0$	Удаляются переменные, так как их оценивание не имеет смысла
3	$A \vee B = B \vee A$	$AB = BA$	Переместительный (коммутативности)
4	$A \vee \neg A = 1$		Один из операторов всегда 1 (закон исключения третьего)
5		$A \,\&\, \neg A = 0$	Один из операторов всегда 0 (закон непротиворечия)
6	$A \vee A = A$	$A \,\&\, A = A$	Идемпотентности (NB! Вместо *A* можно подставить составное выражение!)
7	$\neg\neg A = A$		Двойное отрицание
8	$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$	$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$	Ассоциативный
9	$(A \vee B)\&C=(A\&C)\vee(B\&C)$	$(A\&B) \vee C = (A \vee C)\&(B \vee C)$	Дистрибутивный
10	$(A \vee B)\&(\neg A \vee B) = B$	$(A\&B) \vee (\neg A\&B) = B$	Склеивания
11	$\neg(A \vee B) = \neg A \,\&\neg B$	$\neg(A\&B) = \neg A \vee \neg B$	Правило де Моргана
12	$A \vee (A\&C) = A$	$A\&(A \vee C) = A$	Поглощение
13	$A\to B = \neg A \vee B$ и $A\to B = \neg B\to\neg A$		Снятие (замена) импликации
14	1) $A\leftrightarrow B = (A\&B) \vee (\neg A\&\neg B)$ 2) $A\leftrightarrow B = (A \vee \neg B)\&(\neg A \vee B)$		Снятие (замена) эквивалентности

Замена операций импликации и эквивалентности

Операций импликации и эквивалентности иногда нет среди логических операций конкретного компьютера или транслятора с языка программирования. Однако для решения многих задач эти операции необходимы. Существуют правила замены данных операций на последовательности операций отрицания, дизъюнкции и конъюнкции.

Так, заменить операцию импликации можно в соответствии со следующим правилом:

$A \to B = \neg A \vee B$

Для замены операции эквивалентности существует два правила:

$A \Leftrightarrow B = (A \,\&\, B) \vee (\overline{A} \,\&\, \overline{B})$

$A \Leftrightarrow B = (A \vee \overline{B}) \,\&\, (\overline{A} \vee B)$

В справедливости данных формул легко убедиться, построив таблицы истинности для правой и левой частей обоих тождеств.

Логические выражения и множества

На числовой прямой даны два отрезка: P = [2, 10] и Q = [6, 14]. Выберите такой отрезок A, что формула
((x ∈ A) → (x ∈ P)) ∨ (x ∈ Q)
тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной х.

1. [0, 3]
2. [3, 11]
3. [11, 15]
4. [15, 17]

Решим уравнение: ((x ∈ A) → (x ∈ P)) ∨ (x ∈ Q)=1 методом подстановки.
В уравнение вместо P, Q впишем сами отрезки: [2, 10] и [6, 14].
(x ∈ A)=1 для всех вариантов.

Вариант ответа	**Интервал А**	**Значения х для проверки (границы интервала)**	**((x ∈ A) → (x ∈ [2, 10])) ∨ (x ∈ [6, 14])**
1	[0, 3]	0, 3	(1→0)∨0=0 (1→1)∨0=1
2	[3, 11]	3, 11	(1→1)∨0=1 (1→0)∨1=1
3	[11, 15]	11, 15	(1→0)∨1=1 (1→0)∨0=0
4	[15, 17]	15, 17	(1→0)∨0=0 (1→0)∨0=0

Ответ 2 вариант [3,11]